Lineare Algebra

Komplexe Zahlen

$z = x + y i = r(\cos\varphi) + i\sin\varphi)$ $\quad \bar{z} = x - iy = r \cdot e^{i(\pi - \varphi)}$

Re Im $= r e^{i\varphi}$

$|z| = r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$

$\varphi \to \begin{cases} \arctan\frac{y}{x} & \text{I} \\ \arctan\frac{y}{x} + \pi & \text{II III Q} \\ \arctan\frac{y}{x} + 2\pi & \text{IV Q} \end{cases}$

Operationen:

$+/-$: $(x_1+x_2)+(y_1+y_2)i$ $\quad \frac{z_1}{z_2}: \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$ $\quad \frac{z_1 \cdot \bar{z_2}}{|z_2|^2}$

$z_1 \cdot z_2: (x_1+y_1 i)\cdot(x_2+y_2 i)$ $\quad z^n: r^n \cdot e^{i\varphi n}$

$= r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$

$\sqrt{z}: a = z^n \iff |a| \cdot e^{i\alpha} = r^n \cdot e^{i\varphi n} \iff \begin{cases} r = \sqrt[n]{|a|} \\ \varphi = \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \end{cases}$ $k = 0, 1, \dots, n-1$ Hauptwert

Polynome $P(z) = 0$ lösen

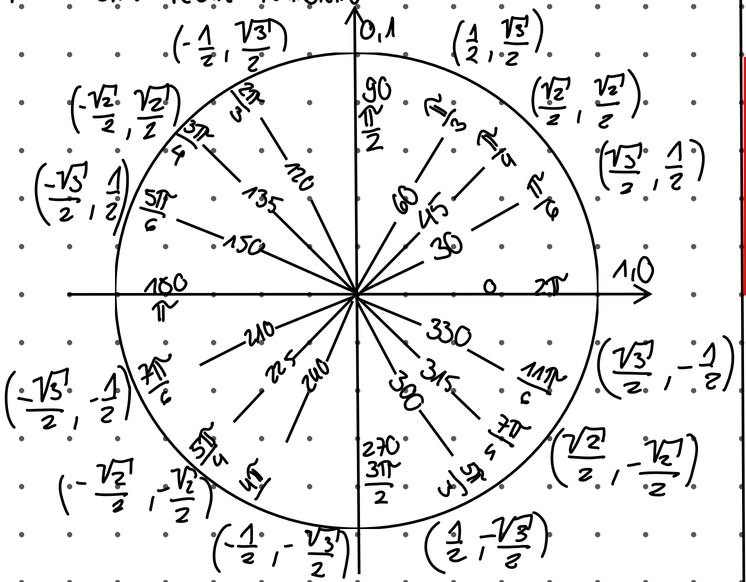
Grad 2: $z = \frac{b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Sonderfall: $az^n + c = 0$

$\iff z = \sqrt[n]{-\frac{c}{a}}$

> Bei Polynomen mit komplexen Nullstellen, treffen die NS als komplex, konjugiertes Paar auf

Bei einem Polynom über $\mathbb{C}$ mit ungeradem Grad gibt es min. eine reelle Nullstelle



LGS

Gauss-Algorithmus $O(n^3)$ Ziel: Zeilenstufenform

Operationen: · Zeilen vertauschen · Zeilen +/- · Zeilen multiplizieren

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & \\ \hline \text{Pivot} & (x) & x & x & \dots & x & b_1 \\ & 0 & (x) & x & \dots & x & b_2 \\ & 0 & 0 & 0 & \dots & (x) & b_r \\ & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_m \end{array}$$

LHS RHS $\quad r = \text{Rang}$

wenn RHS = 0 homogen

Verträglichkeitsbedingung: $b_{r+1} = \dots = b_m = 0$

Anzahl Lösungen

S.1.1 $Ax = b$ hat min. 1 Lösung $\iff r = m$ od. $r < m$ + VI ist das erfüllt so gilt:
- $r = n$ 1 Lösung
- $r < n$ ∞ Lösungen

$\Rightarrow r = m$: $r = n = m$ 1 Lsg regulär; $r < n$ ∞ Lsg $(n-r)$ freie Variablen

$\Rightarrow r < m$: $r = n$ 1 Lsg; $r < n$ ∞ Lsg. $(n-r)$ freie Variab.

Bei einem homogenen LGS sind die VB immer erfüllt. Nur wenn $r < n$ gibt es nicht die triviale LS

Matrizen & Vektoren

Eine $m \times n$ Matrix hat m Zeilen und n Spalten, wobei das i,j Element mit a_{ij} oder $(A)_{ij}$ bezeichnet wird

S.2.1.
- $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$
- $(\alpha A)B = \alpha(AB)$
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
- $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$
- $A + B = B + A$
- $(A+B)+C = A+(B+C)$
- $(AB)\cdot C = A(BC)$
- $(A+B)\cdot C = AC + BC$
- $A(B+C) = AB + AC$

generell gilt $AB \neq BA$. wenn $AB = BA$, dann kommutieren die Matrizen

Def. Wenn $AB = 0$, so sind A und B Nullteiler

Def Eine Linearkombination der Vektoren $a_1 \dots a_n$ ist $\alpha_n \cdot a_n + \dots + \alpha_1 a_1$

Def. Eine Matrix ist symmetrisch, wenn $A^T = A$ und hermitesch wenn $A^H = A$ (diag = reel)

Def. Eine Matrix ist schiefsymmetrisch, wenn $A^T = -A$

S.2.6
- $(A^T)^T = A$
- $(\alpha A)^T = \alpha(A^T)$
- $(AB)^T = B^T A^T$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$

falls A, B symmetrisch

S.2.7 $A^T A = A A^T$ (symmetrisch) | $AB = BA \iff AB$ symm.

Skalarprodukt und Norm (euklidisch)

Das eukl. Skalarprodukt: $\langle x, y \rangle = x^T y$ (inneres Produkt)

S.2.9
- SP ist linear, $\langle x, y+z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$ und $\langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
- SP ist symmetrisch/hermitesch $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
- SP ist positiv definit $\langle y, x \rangle > 0$ sonst $x = 0$

Die eukl. Norm: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x^T x}$ (Länge von x)

S2.11 Schwarzsche Ungleichung: $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ das Gleich gilt, wenn y ein Vielfaches von x ist.

S2.12 Für die eukl / 2-Norm gilt:
- positiv definit $\|x\| > 0$ (= 0 wenn $x = 0$)
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
- Dreiecksungleichung: $\|x \pm y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Def. Winkel φ zwischen x, y: $\varphi = \arccos \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$

Def: x, y sind orthogonal, wenn $\langle x, y \rangle = 0$; $x \perp y$

S2.13 Pythagoras: $\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ falls $x \perp y$

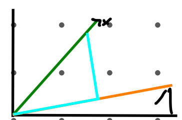
Def p-Norm: $\|x\|_p = (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$

Äusseres Produkt und Projektion

Das äussere Produkt ist die Matrix, die entsteht, wenn wir zwei Vektoren x, y wiefolgt multiplizieren: $x \cdot y^T$ (Rang-1)

S.2.15 Die orthogonale Projektion von x auf y ist gegeben durch $P_y x = \frac{1}{\|y\|^2} \cdot y y^H x$

Def Die Projektionsmatrix $P_y = \frac{1}{\|y\|^2} \cdot y y^H$



Inverse

Def. Eine $n \times n$ Matrix A ist invertierbar, wenn eine Matrix A^{-1} existiert, so dass $AA^{-1} = I_n = A^{-1} A$

S2.17 Es gilt:
- A ist invertierbar
- A ist regulär, Rang $A = n$
- $\exists X: AX = I_n$
- X ist eindeutig

S2.18 Sind A, B regulär so gilt
- A^{-1} ist regulär und $(A^{-1})^{-1} = A$
- AB ist regulär und $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- A^H ist regulär und $(A^H)^{-1} = (A^{-1})^H$

S.2.19 Ist A regulär, so hat das LGS $Ax=b$ die eindeutige Lösung $x = A^{-1}b$

Inverse finden $O(n^3)$ $[A \mid I] \xrightarrow[\text{Operationen}]{\text{Zeilen}} [I \mid A^{-1}]$

Falls $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $\det(A) \neq 0 \iff A$ ist invertierbar, so ist

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Orthogonale/Unitäre Matrizen

Def. Eine Matrix heisst orthogonal/unitär, wenn $AA^T = I_n$ $A^TA = I_n$
$AA^H = I_n$ / $A^HA = I_n$ $\det A = \pm 1$

S2.20 Sind A und B unitär so gilt:
- A ist regulär und $A^{-1} = A^H$
- $AA^H = I_n$
- A^{-1} ist unitär
- AB ist unitär

same orthogonale Matrizen

alle Spalten sind orthonormal

S.2.21 Abbildungen durch unitäre/orthogonale Matrizen sind längen- und winkeltreu

Rotationsmatrix

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation der durch die erste und dritte Achse aufgespannte Ebene

- orthogonal,
- isometric
- angle preserving

Blockmatrix

$$A = \left(\begin{array}{c|c} a_{11} & a_{12} \\ \hline a_{21} & a_{22} \end{array}\right) \quad \text{wenn invertierbar} \quad A^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} a_{11}^{-1} & a_{12}^{-1} \\ \hline a_{21}^{-1} & a_{22}^{-1} \end{array}\right)$$

LR-Zerlegung

Die LR-Zerlegung ist ein weiteres Verfahren zum Lösen von LGS. Besonders effektiv, wenn wir mehrere LGS mit gleichem A

1) Finde $PA = LR$!
2) Löse $Lc = Pb$
3) Löse $Rx = c$

Wenn Zeilen verändert werden, verändert sich P (pivoting)

Es ist nützlich wenn Pivot $|x|$ möglichst gross ist

veränderte Zeile – x-fertige Zeile!

$$\begin{array}{c} \\ \frac{1}{2}\mathrm{I} \\ 1\mathrm{I} \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \frac{2}{3}\mathrm{I} \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} & 1 & \frac{2}{3} & 1 \end{array}\right)$$

$\underbrace{\qquad}_{P}$ $\underbrace{\qquad}_{R}$ $\underbrace{\qquad}_{}$

Vektorräume

Def. Ein Vektorraum V über $\mathbb{K}$ ist eine nicht leere Menge auf der eine Vektoraddition und Skalarmultiplikation definiert sind.

Axiome:
- V1: $x + y = y + x$
- V2: $(x+y) + z = x + (y+z)$
- V3: $\exists\, 0 \in V: x + 0 = x$ Nullvektor
- V4: $\forall x$ existiert $-x: x + (-x) = 0$
- V5: $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$
- V6: $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
- V7: $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$
- V8: $1x = x$

S.4.1. i) $0 \cdot x = 0$ ii) $\alpha \cdot 0 = 0$ iii) $\alpha \cdot x = 0 \Rightarrow x = 0$ od $\alpha = 0$
iv) $(-\alpha) \cdot x = \alpha \cdot (-x) = -(\alpha x)$

Unterräume

Def. Ein Unterraum U ist eine nicht-leere Teilmenge von V der abgeschlossen bezgl. Addition und Multiplikation. U beinhaltet immer den Nullvektor.

S.4.3 Jeder Unterraum ist ein Vektorraum

Def. Die Menge der Linearkombinationen der Vektoren $v_1, \dots, v_n$ ist der Unterraum aufgespannt durch diese Vektoren.
$\longrightarrow$ span $\{v_1, \dots, v_n\}$ lineare Hülle von $v_1, \dots, v_n$

Def. Die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ sind ein Erzeugendensystem von V, wenn $\forall x \in V \Rightarrow w \in \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_n\}$.

Bsp: Sei V der VR der reellwertigen Funktionen über $\mathbb{R}$ zeige, dass $U = \{f \in V : f(x + 2\pi) = f(x)\} \subseteq V$.

Basis der 3 Bedingungen

U_0: $\theta(x) =$ Nullfunktion
$\theta(x) = 0 = \theta(x + 2\pi)$ $\Rightarrow \theta \in U$

U_1: $x, y \in U \rightarrow x(x) = x(x+2\pi)$ und $y(x) = y(x+2\pi)$
$f := x + y,\ f(x) = x(x) + y(x) = x(x+2\pi) + y(x+2\pi) = f(x+2\pi)$
$\Rightarrow f \in U$

U_2: $\alpha \in \mathbb{R}, w \in U \Rightarrow w(x) = w(x+2\pi)$
$\alpha w(x) = \alpha w(x+2\pi)$
$\Rightarrow \alpha w \in U$

$\square$

Lineare Abhängigkeit, Basen und Dimensionen

Def. Vektoren $v_1, \dots, v_n$ sind linear unabhängig, wenn kein Vektor eine LK der anderen Vektoren ist. $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k v_k = 0$ only if $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$

Def. Eine span $\{v_1, \dots, v_n\} = V$ ist eine Basis B von V, wenn $v_1, \dots, v_n$ l.u. sind.

Def: Die Dimension von V ist $\dim V = |\operatorname{span} V|$ $\dim\{0\} = 0$

L.4.8 Jede Menge $\{v_1, \dots, v_m\} \subset V$ mit $|B| < m$ ist linear abhängig

K.4.10 In jedem endlichen V.R, ist eine Menge von n l.u. Vektoren eine Basis von V, wenn $\dim V = n$.

Def. Die Koeffizienten ξ_k sind Koordinaten von x bezgl. einer Basis B. $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T$ ist ein Koordinatenvektor und $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i b_i$ ist die Koordinatendarstellung von x bezgl. B

Def Zwei Unterräume $U, U' \subset V$ sind komplementär wenn jedes $v \in V$ eine eindeutige Darstellung $v = u \in U + u' \in U'$ hat. V ist dann die direkte Summe aus U und U': $V = U \oplus U'$.

Basiswechsel und Koordinatentransformation

Def. Wenn wir von einer alten Basis B_0 zu einer neuen Basis B_1 wechseln, können wir die neue Basis mit der alten darstellen.
$b_{k_1} = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ik} b_{0i}$, wobei $T = (\gamma_{ik})$ die Basiswechselmatrix ist

S.4.13 $\xi_0 = T\xi_1$ und $\xi_1 = T^{-1}\xi_0$. T ist invertierbar (regulär)

Def. Wollen wir die neue Basis gilt $B_1 = B_0 T$!

⚠ T ist von neu nach alt bei Koordinaten ⚠

Lineare Abbildungen

Def: Eine Abbildung $F: V \to W$ ist linear, wenn gilt:

- $F(v+w) = F(v) + F(w)$
- $F(\alpha \cdot v) = \alpha F(v)$

$\Big\}\ F(\alpha v + w) = \alpha F(v) + F(w)$

Funktionen

Sei $F: X \to Y$ kann dies als eine Funktion $x \longmapsto f(x)$ betrachtet werden

Def
Injektiv: $\forall x, x' \in X: f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$
Surjektiv: $f(X) = Y$
Bijektiv: Injektiv und Surjektiv $\Rightarrow f^{-1}$ existiert

Matrixdarstellung von lineare Abbildungen

Sei F eine lineare Abbildung $X \mapsto Y$. $F(b_l) \in Y$ lässt sich als LK der Basen von Y schreiben $F(b_l) = \sum_{k=1}^{m} a_{kl} c_k$

Def. Die Matrix $A^{m \times n}$ mit Elementen a_k, a_l heisst die Abbildungsmatrix bezüglich X, Y

$F(x) = y \iff A\xi = \eta$

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "F"] \arrow[d, shift right, "k_x"'] & {} \arrow[d, shift right, "k_y"'] \\ {} \arrow[u, shift right, "k_x^{-1}"'] \arrow[r, "A"] & {} \arrow[u, shift right, "k_y^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

Def. Ist F bijektiv so ist es ein Isomorphismus, ist $X = Y$, ist es ein Automorphismus

S.5.1 Ist F ein Isomorphismus, so existiert F^{-1} und ist auch ein Isomorphismus

Kern, Bild und Rang

Def. Der Kern von F ist $\ker F = \{x \in X \mid F(x) = 0\}$ ist ein Unterraum von X. F injektiv $\iff \ker F = \{0\}$
Dim Kern: Anzahl freie Element: setze ein Pivotelement auf 0, die anderen auf 1

Def. Das Bild von F ist $\operatorname{im} F = \{F(x) \mid x \in X\}$ ist ein Unterraum von Y. F surjektiv $\iff \operatorname{im} F = Y$
Dim Im: Anzahl Pivot: Zeilen mit Pivot = Lösung

ker A   Lösungsmenge von $Ax = 0$
im A   Menge aller b, so dass $Ax = b$ lösbar ist

S.5.7 Rangsatz: $\dim X - \dim(\ker F) = \dim(\operatorname{im} F) = \operatorname{Rang} F$

Def: Der Rang F ist gleich $\dim(\operatorname{im} F)$

K.5.8.
- $F: X \to Y$ injektiv $\iff \operatorname{Rang} F = \dim X$
- $F: X \to Y$ surjektiv $\iff \operatorname{Rang} F = \dim Y$

Isomorphismus • $F: X \to Y$ bijektiv $\iff \operatorname{Rang} F = \dim X = \dim Y$
Automorphismus $F: X \to X$ bijektiv $\iff \operatorname{Rang} F = \dim X$
k.d. $F = \{0\}$

K.5.10
- $\operatorname{Rang}(G \circ F) \leq \min(\operatorname{Rang} F, \operatorname{Rang} G)$
- G injektiv $\Rightarrow \operatorname{Rang}(G \circ F) = \operatorname{Rang} F$
- F surjektiv $\Rightarrow \operatorname{Rang}(G \circ F) = \operatorname{Rang} G$

Matrizen als lineare Abbildungen

Def. Der Spaltenraum von A ist der Unterraum $R(A)$ $= \operatorname{span}\{a_1, \dots, a_n\}$. $\operatorname{im} A = R(A)$

Def. Der Nullraum von A ist der Unterraum $N(A)$ $= \mathcal{L}_0 (Ax = 0)$, $\ker A = N(A)$ # freie Variablen $= \dim N(A)$

S.5.12. Rang $A = r$ und $\mathcal{L}_0$ Lösungsmenge von $Ax = 0$
$\Rightarrow \dim \mathcal{L}_0 = \dim N(A) = \dim(\ker A) = n - r$

S.5.13 Rang $A \in M^{m \times n}$:
- # Pivotelement in RFT
- $\dim(\operatorname{im} A)$
- dim des Zeilen- / Spaltenraums

K.5.14 $\operatorname{Rang} A^T = \operatorname{Rang} A^H = \operatorname{Rang} A$

S.5.16 $A \in M^{m \times n}$ und $B \in M^{m \times n}$
- $\operatorname{Rang} BA \leq \min(\operatorname{Rang} A, \operatorname{Rang} B)$
- $\operatorname{Rang} B = m \leq p \Rightarrow \operatorname{Rang} BA = \operatorname{Rang} A$
- $\operatorname{Rang} A = m \leq n \Rightarrow \operatorname{Rang} BA = \operatorname{Rang} B$

S.5.18 Für quad Matrizen sind folgende Aussagen äquivalent:
- A ist regulär
- A ist invertierbar
- Rang $A = n$
- Zeilen sind linear unabhängig
- Spalten sind l.u
- $\operatorname{im} A = R(A) = \mathbb{E}^n$
- $\ker A = N(A) = \{0\}$

S.5.19 Für $Ax = b$, $b \neq 0$ mit einer Lösung x_0 und $\mathcal{L}_0$, so ist die Lösungsmenge $\mathcal{L}_b = x_0 + \mathcal{L}_0$ ein affiner Teilraum
kein echter Unterraum da $0 \notin$

Finden einer Basis an

im A = R(A) · Zeilenraum
1) Zeilenstufenform
2) Pivotspalten markieren
3) Pivotspalten von A sind Basis von im A

ker A = N(A) · Spaltenraum
1) Zeilenstufenform
2) Freie Variablen finden
3) $\mathcal{L}_0$ von $Ax = 0$ als LK von Vektoren mit den freien Variablen als Koeff. Diese Vektoren bilden Basis

Zauberzahlen m, n, r

Sei $A \in M^{m \times n}$ mit Rang $A = r$
- $\dim(\operatorname{im} A) = \dim(\operatorname{im} A^{-1}) = r$, $\dim(\ker A) = n - r$, $\dim(\ker \bar{A}) = m - r$

$r = n \iff \ker A = \{0\}$
$\iff$ Spalten von A sind l.u
$\iff A$ ist injektiv
$\iff$ Zeilen A sind erzeugend

$r = m \iff \ker A^T = \{0\}$
$\iff$ Spalten A sind erzeugend
$\iff$ Zeilen von A sind l.u.
$\iff A$ ist surjektiv

Abbildung von Koordinatentransformationen

Seien X und Y VR mit $\dim X = n$, $\dim Y = m$ und:
- $F: X \to Y$ eine lineare Abbildung
- $A: \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m$, $\xi \to \eta$ eine Abbildungsmatrix
- $B: \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^{m'}$, $\xi \to \eta'$, eine Abbildungsmatrix
- $T: \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^{n'}$, $\xi' \to \xi$, eine Transformationsmatrix
- $S: \mathbb{E}^m \to \mathbb{E}^{m'}$, $\eta' \to \eta$, eine Transformationsmatrix

$$\begin{tikzcd} x \in X \arrow[r, "F"] \arrow[d, shift right, "k_x"'] & Y \arrow[d, shift right, "k_y"'] \\ \xi \in \mathbb{E}^n \arrow[u, shift right, "k_x^{-1}"'] \arrow[r, "A"] \arrow[d, shift right, "T^{-1}"'] & \eta \in \mathbb{E}^m \arrow[u, shift right] \arrow[d, shift right] \\ \xi' \in \mathbb{E}^n \arrow[u, shift right, "T"'] \arrow[r, "B"] & \eta \in \mathbb{E}^m \arrow[u, shift right] \end{tikzcd}$$

$A = SBT^{-1}$
$B = S^{-1}AT$
wenn $F: X \to X$ gilt:
$A = TBT^{-1}$
$B = T^{-1}AT$

S.5.20 Hat F Rang r so besitzt bzgl. geeigneten Basen von X, Y die Abbildungsmatrix $A = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$

Vektorräume mit Skalarprodukt

Def. Eine Norm in einem VR ist eine Funktion $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$, $x \to \|x\|$ mit den Bedingungen:
N1. positiv definit: $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \iff x = 0$
N2. homogen: $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
N3. Dreiecksungleichung: $\|x \pm y\| \leq \|x\| + \|y\|$
Ein VR mit Norm ist ein normierter VR

Def. Ein Skalarprodukt ist eine Funktion $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \to \mathbb{E}$, $x, y \to \langle x, y \rangle$. Dabei gilt:
S1. Linear im zweiten Faktor: $\langle x, \alpha(y+z) \rangle = \alpha(\langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle)$
S2. Symmetrisch / hermitesch $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
S3. Positiv definit: $\langle x, x \rangle \geq 0$, $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

Bsp: Eukl. Norm: $\|x\|_2 = \sqrt{x^T x}$ — Eukl. SP: $\langle x, y \rangle = x^T y$
Max norm: $\|p\|_\infty = \max_{0 \leq x \leq 1} |p(x)|$ — P-Norm: $\|x\|_p = (x_1^p + \dots + x_n^p)^{\frac{1}{p}}$

Def Die induzierte Norm / Länge eines Vektors ist definiert durch $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$, $\|x\| \to \sqrt{\langle x, x \rangle}$

Def. Der Winkel $\varphi = \measuredangle(x, y)$, $0 \leq \varphi \leq \pi$ ist definiert durch
$\varphi = \arccos \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}$

Def Zwei Vektoren sind orthogonal wenn $\langle x, y \rangle = 0$, $x \perp y$
Zwei Teilmengen sind orthogonal, wenn $\forall x \in M, \forall y \in N$ $\langle x, y \rangle = 0$ $M \perp N$

S.6.1 Cauchy-Schwarz-Ungleichung $|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$

S.6.2 Pythagoras: wenn $x \perp y$ gilt $\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Def. Eine Basis ist orthogonal, wenn $\langle b_i, b_k\rangle = 0$ für alle $b_i \neq b_k$, wenn alle Basisvektoren Länge 1 haben, orthonormal

S.6.4 Sei $\{b_1, \dots, b_n\}$ eine Orthonormalbasis und $x \in V$ gilt
$x = \sum_{k=1}^{n} \langle b_k, x\rangle b_k \Rightarrow \xi_k = \langle b_k, x\rangle$

S.6.5 Parsevalsche Formel aus $\xi_k = \langle b_k, x\rangle_V$, $\eta_k = \langle b_k, x\rangle$ folgt $\langle x, y\rangle_V = \sum_{k=1}^{n} \bar{\xi}_k \eta_k = \xi^H \eta = \langle \xi, \eta\rangle$ $\mathbb{E}^n$

Dh. wenn die Basis in V orthonormal ist gilt SP. in V = eukl. S.P. in $\mathbb{E}^n$
$\Rightarrow \|x\|_V = \|\xi\|_{\mathbb{E}^n}$, $\sphericalangle(x,y)_V = \sphericalangle(\xi,\eta)_{\mathbb{E}^n}$, $x \perp y \iff \xi \perp \eta$

Alg: Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsverfahren

- $b_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|_V}$
- $\tilde{b}_k = a_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle b_j, a_k\rangle \cdot b_j$
- $b_k = \frac{\tilde{b}_k}{\|\tilde{b}_k\|_V}$

S.6.6 Nach k-Schritten sind $\{b_1, \dots, b_k\}$ paarweise orthonormal. Wenn $\{a_1, \dots, a_n\}$ eine Basis von V ist, ist $\{b_1, \dots, b_n\}$ eine Orthonormalbasis
$\Rightarrow$ Jeder VR mit dim VR $< \infty$ hat eine Orthonormalbasis

Def $U^\perp$ ist das orthogonale Komplement von U.R. U. $U \oplus U^\perp = V$

S.6.9 Für eine komplexe $m \times n$ Matrix mit Rang r gilt:
- $N(A) = R(A^H)^\perp \subset \mathbb{E}^n$ • $N(A^H) = R(A)^\perp \subset \mathbb{E}^m$
- $N(A) \oplus R(A^H) = \mathbb{E}^n$ • $N(A^H) \oplus R(A) = \mathbb{E}^m$
- $\dim R(A) = r$ • $\dim N(A) = n - r$
- $\dim R(A^H) = r$ • $\dim N(A^H) = m - r$

Das sind die fundamentalen Unterräume. Für reele Matrizen kann A^H mit A^T ersetzt werden.

Basiswechsel und Koordinatentransformation von Orthonormalbasen

Wir wollen von B nach B', wobei beides Orthonormalbasen sind. Wir können $b_k' = \sum_{j=1}^{n} \tau_{jk} b_j$ schreiben und erhalten die Basiswechselmatrix T. Da B, B' orthonormal sind gilt $T^{-1} = T^H$

Daher gilt $\xi = T\xi'$ und $\xi' = T^H \xi$. Zudem ist $B' = BT$ und $B = B'T^H$, wobei alle Matrizen unitär/orthogonal sind

S.6.10 Die Transformationsmatrix einer Basistransformation zwischen Orthonormalbasen ist unitär/orthogonal.

K.6.12 $\langle x, y\rangle_V = \xi^H \eta = \langle \xi, \eta\rangle = \langle \xi', \eta'\rangle = \xi'^H \eta'$
$\Rightarrow T$ ist längen- winkeltreu

$A = SBT^H$, $B = S^H A T$ wenn $F: X \to Y$ gilt:
$A = TBT^H$, $B = T^H A T$ $\Rightarrow A, B$ sind hermitesch/reel symmetrisch

Orthogonale/unitäre Abbildungen

Def. Eine lineare Abbildung $F: X \to Y$ ist unitär/orthogonal falls $\langle F(v), F(w)\rangle_Y = \langle v, w\rangle_X$.

S.6.13
1) F ist längentreu/isometrisch: $\|F(v)\|_Y = \|v\|_X$
2) F ist winkeltreu: $v \perp w \iff F(v) \perp F(w)$
3) $\ker F = \{0\}$, F ist injektiv

Falls $n = \dim X = \dim Y < \infty$:

4) F ist ein Isomorphismus
5) $\{b_1, \dots, b_n\}$ Orthonormalbasis von X $\iff \{F(b_1), \dots, F(b_n)\}$ Orthonormalbasis von Y
6) F^{-1} ist unitär/orthogonal
7) Die Abbildungsmatrix A ist unitär/orthogonal

Least Squares Methode

Sei $Ax = b$ ein überbestimmtes LGS (mehr Gleichungen als Variablen). Da es keine Lösung gibt, wollen wir es so lösen, dass $\|Ax - b\|_2^2$ möglichst klein ist

D.h. wir suchen $x^* = \arg\min_{x \in \mathbb{E}^n} \|Ax - b\|_2^2$, dies ist der Fall, wenn $Ax - b$ senkrecht zur Hyperebene $R(A)$ steht

Def. Die Normalgleichung $A^H A x = A^H b$ kann benutzt werden um solch ein LGS zu lösen

Lemma: $A^H A$ ist regulär $\iff$ Rang $= n$

Def: Wenn $A = n$, so ist $A^+ = (A^H A)^{-1} A^H$ die Pseudoinverse von A, d.h. $A^+ A = I$

Determinante

Die Determinanten für Matrizen der Grössen 1,2,3 sind gegeben durch $\det(a_{11}) = a_{11}$, $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i\end{pmatrix}$ $= aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$

Def Die Determinante einer quad. Matrix A ist
$\det A := \sum_{p \in S_n} \mathrm{sign}(p) \cdot a_{1p(1)} \cdot \ldots \cdot a_{np(n)}$

Permutationen $n!$ — gerade, ungerade

$\det A = 0 \iff A$ singulär
$\det A \neq 0 \iff A$ regulär

Wichtige Eigenschaften

gilt auch für Spalte statt Zeile

S.8.3 i) $\det(A)$ ist linear in jeder Zeile

$\det\begin{bmatrix} \alpha u_i + \beta w_i \end{bmatrix} = \alpha \det\begin{bmatrix} u_i \end{bmatrix} + \beta \det\begin{bmatrix} w_i \end{bmatrix}$

ii) bei Zeilenvertauschung wechselt $\det(A)$ das Vorzeichen
iii) $\det(I) = 1$
iv) hat A eine Nullzeile, so ist $\det(A) = 0$
v) $\det(\mu A) = \mu^n \det(A)$
vi) hat A zwei gleiche Zeilen ist $\det(A) = 0$
vii) addiert man zu einer Zeile ein Vielfaches einer anderen Zeile ändert sich $\det(A)$ nicht
viii) ist A eine Diagonalmatrix/Dreiecksmatrix: $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

S.8.5 Wenden wir Gauss auf A an gilt:
$\det(A) = (-1)^v \cdot \prod_{k=1}^{n} r_{kk}$
v = Zeilenvertauschungen
r_{kk} = Diagonalelemente

S.8.7 $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

K.8.8 A ist regulär $\Rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

Falls $\det(A) \neq 0$ ist F eine bijektive Abbildung

Determinante von Blockmatrizen

$\det\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & D \end{bmatrix} = \det(A) \cdot \det(D)$

Eigenwerte und Eigenvektoren

Def: Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{E}$ heisst Eigenwert der linearen Abb $F: X \to X$ falls es $v \in V, v \neq 0$ gibt, so dass $F(v) = \lambda v$. Solch einen Vektor nennt man Eigenvektor

Die Menge aller EV die zu λ gehören, bilden einen U.R. $E_\lambda = \{v \in V \mid F(v) = \lambda v\}$

Def: Die Menge aller EW von F heisst Spektrum von F.

Def: $\xi \in \mathbb{E}^n$ ist ein EV von λ, ill $A\xi = \lambda \xi$

L.9.1 Eine lin. Abb F und ihre Matrixdarstellung, haben die gleichen EW und die EV sind über die Koordinatenabbildung κ verbunden.

L.9.2 λ ist ein EW, iff $\ker(A-\lambda I)$ nicht nur aus dem NV besteht (singulär). $E_\lambda = \ker(A-\lambda I)$. $A-1I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $n-r = 2-1 = 1$ geom. Vielfachheit

Def. Die geometrische Vielfachheit von λ entspricht $\dim E_\lambda$

Def. Das Charakteristische Polynom ist definiert durch $\chi_A(\lambda) = \det(A-\lambda I)$. Wobei $\chi_A(\lambda)=0$, die char. Gleichung ist

$\boxed{\text{Char. Polynom von } A \in \mathbb{R}^{2\times 2}: \ \chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{spur}(A)\cdot\lambda + \det(A)}$

Def. Die Summe der Diagonalelemente einer Matrix A nennt man Spur A

$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i =$ Spur und $\prod_{i=0}^{n} \lambda_i =$ Determinante

S.9.5 $\lambda \in \mathbb{E}$ ist ein EW von $A \in \mathbb{E}^{n\times n} \Leftrightarrow \lambda$ eine NS von χ_A $\Leftrightarrow \lambda$ eine Lösung der char. Gleichung

L.9.4. $\chi_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \operatorname{spur}A \cdot \lambda^{n-1} + \dots + \det A \cdot \lambda^0 = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0 \lambda^0$

Def. Die algebraische Vielfachheit eines EW λ^* ist die Vielfachheit von λ^* als NS von $\chi_A(\lambda)$ (über $\mathbb{C}$)

eines EW λ, Vielfachheit von λ als Nullstelle des Charakteristischen Polynoms

S.9.13 $\boxed{\text{geom Viel} \leq \text{alg. Viel}}$

Bei schiefsymmetrischen Matrizen ($A^T = -A$) sind alle EW entweder 0 oder imaginär

$\det(A) = \begin{cases} \det(A^T) & n = 2k \\ 0 & n = 2k+1 \end{cases}$ Zeilen sind ungerade

EW und EV finden

i) bestimme das char. Polynom $\chi_A(\lambda) = \det(A-\lambda I)$

ii) Bestimme die Nullstellen $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ von χ_A. EW

iii) Für jedes λ_k bestimme die Menge an Lösungen für $(A-\lambda_k I)x = 0$ EV

S.9.7 Für ähnliche Matrizen A und C ($C = T^{-1}AT$) gilt:
- gleiches char. Polynom
- gleiche Spur
- gleiche Determinante
- gleiche Eigenwerte

S.9.11 EV zu verschiedenen EW sind linear unabhängig.
$\Rightarrow$ max $n = \dim V$ verschiedene EW

Sei λ ein EW von A so ist λ^{50} ein EW von A^{50}.

$A \in \mathbb{E}^{n\times n}$, A hermitesch ($A^H = A$)

positiv definit: $\forall x, x \neq 0$ gilt $x^H A x > 0$

positiv semidefinit: $\forall x$ gilt $x^H A x \geq 0$

Spektral-Eigenwertzerlegung

Wenn $\mathbb{E}^n$ eine Basis aus EV von $A \in \mathbb{E}^{n\times n}$ besitzt, so ist A ähnlich zu einer Diagonalmatrix Λ:

$$\underbrace{A}\ \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix}}_{V} = \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix}}_{V} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\Lambda} \qquad \boxed{A = V \Lambda V^{-1}}$$

Voraussetzung für Diagonalisierbarkeit

- Char. Polynom zerfällt komplett in Linearfaktoren
- geom. Viel. = alg. Viel. für jeden EW

Eine Matrix A ist nur dann über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar, wenn alle EW reel sind

S.9.14. $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ alg. Viel = geom. Viel.

S.9.15 Spektralsatz Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ Hermitesch: $A^H = A$

i) alle EW sind reel

ii) die EV sind paarweise orthogonal

iii) es gibt eine orthonormale Basis aus EV

iv) für die unitäre Matrix U gilt: $U^H A U = \Lambda$

K.9.16 Dies gilt alles auch für reel-symmetrische Matrizen

Def: A ist normal wenn $A^H A = A A^H \Rightarrow$ diagonalisierbar durch eine unitäre Matrix

Singulärwertzerlegung

SVD existiert für jede Matrix. $A^H A$ ist immer Hermitesch und positiv definit $\Rightarrow \Sigma$ hat nur positive Werte auf diagonale

$\Rightarrow A^H A V = V\Lambda \xrightarrow{\lambda = \sigma^2} A^H A V_r = V_r \Sigma_r^2$

$\Rightarrow V_r^H A^H A V_r = \Sigma_r^2$

$\Rightarrow \underbrace{(\Sigma_r^{-1} V_r^H A^H)}_{:=U_r^H} \underbrace{(A V_r \Sigma_r^{-1})}_{:=U_r} = I$

Def: Für jede Matrix A existiert eine SVD, so dass U, V unitär und Σ diagonal ist. Σ ist positiv

$\boxed{A = U \Sigma V^H}$ wobei $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_n = 0$

$AA^H = U\Sigma_m^2 U^H$, $A^H A = V \Sigma_n^2 V^H$ und $A^H = V\Sigma^T U^H$

Def: Falls A invertierbar ist gilt $A^{-1} = V\Sigma^{-1}U^H$

Für Rang $= r$ gilt:
- $\{u_1, \dots, u_r\}$: Basis von $\operatorname{Im} A = R(A)$
- $\{u_{r+1}, \dots, u_m\}$: Basis von $\ker A^H = N(A^H)$

links singulär vektoren

- $\{v_1, \dots, v_r\}$: Basis von $\operatorname{Im} A^H = R(A^H)$
- $\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$: Basis von $\ker A = N(A)$

rechts singulär vektoren

Def. Bei einer Selbstabbildung gilt:

$A = U\Sigma V^H = V\underbrace{V^H U}_{R}\Sigma V^H = VR\Sigma V^H$

Rotation / Spiegelung   Basiswechsel zu orthonormal Basis   Skalierung der Hauptachsen

Least Squares mit SVD

$\|Ax - b\|_2^2 = \|\Sigma \underbrace{V^H x}_{y} - \underbrace{U^H b}_{c}\|_2^2 = \|\Sigma y - c\|_2^2$

$x^* = V\Sigma^+ U^H b \Rightarrow \infty$ Lsg, hier kleinste 2-Norm ($y^* = \Sigma^+ U^H b$)

wobei Σ^+ die Pseudoinverse von Σ ist, daher gilt auch

$A^+ = V\Sigma^+ U$.

SVD berechnen

1) gesucht sind U, Σ, V

2) $A^H A = V\Sigma^H \Sigma V^H$ und EW finden $\Rightarrow$ gibt Σ

3) $(A^H A - \lambda I)x = 0$ lösen um EV zu finden und diese normieren $\Rightarrow$ gibt V

4) $AV = U\Sigma$ nach U lösen mit $A V \Sigma^{-1} = U$. Alternativ: $U = AV$ mit normalisierten Spalten

5) Evtl. U_r zu U mit Gram-Schmidt

$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$

$A^H A = \begin{pmatrix} 26 & 18 \\ 18 & 74 \end{pmatrix}$ $\det(A^H A - \lambda I)$
$= \lambda^2 - 100\lambda + 1600$
$= (\lambda - 20)(\lambda - 80)$
$\Rightarrow \lambda_1 = 20 \quad \lambda_2 = 80$

$(A^H A - 20 I)x = 0 \Rightarrow \tilde{v}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, v_1 = \sqrt{10}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(A^H A - 80 I)x = 0 \Rightarrow \tilde{v}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \sqrt{10}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{-3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$ $\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{80} & 0 \\ 0 & \sqrt{20} \end{pmatrix}$

$\sigma_1 \geq \sigma_2$

$AV = \begin{pmatrix} 2\sqrt{10} & -\sqrt{10} \\ 2\sqrt{10} & \sqrt{10} \end{pmatrix}$

$= U\Sigma = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{5} \end{pmatrix}$

QR-Zerlegung

Eine Matrix A kann dargestellt werden als $A = QR$ wobei Q eine orthogonale Matrix und R eine obere Dreiecksmatrix ist.

Diese Zerlegung ist eindeutig wenn $m \geq n$ und Rang $A = n$.

QR-Zerlegung berechnen

① Gram Schmidt auf den Spalten von $A \Rightarrow Q$

② $R = Q^T A$ lösen um R zu erhalten

↳ da Q orthogonal

Alternativ: $R = r_{11} = \|a_1\|$

$r_{jk} = \langle q_j, a_k \rangle$

$r_{kk} = \|\tilde{q}_k\|$

Least-Squares mit QR-Zerlegung

Normalgleichung: $A^T A x = A^T b$

$(QR)^T (QR) x = (QR)^T b$

$R^T Q^T Q R x = R^T Q^T b$

$R^T R x = R^T Q^T b$

$R x = Q^T b$ ← einfach zu lösen

T kann durch H ersetzt werden

$A = QR = Q_1 R_1$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $Q, Q_1 \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $R, R_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$Q^T Q_1 = Q^T Q S^{-1} = S^{-1}$ Immer Diagonalmatrix

Normalgleichung Herleitung:

$x \in \mathbb{E}^n$ finden, sodass $(Ax - b) \perp R(A)$

$\Rightarrow (Ax - b) \in R(A)^\perp = N(A^H)$

$\Rightarrow A^H (Ax - b) = 0$

$\Rightarrow A^H A x - A^H b = 0$

$\Rightarrow A^H A x = A^H b$

Partikuläre Lösung:

→ allgemeine Lösung eines homogenen LGS lässt sich darstellen als Summe einer speziellen Lösung (Partikulärlösung) des Systems und der allgemeinen Lösung des homogenen Systems

---

LGS $Ax = b$ lösbar, wenn b in Kolonnen

$Ax = 0$ hat bestimmte Lösung, wenn Spalten von A linear unabhängig sind

---

Untervektorräume: · Vereinigung $W_1 \cup W_2$ NICHT Untervektorraum

· Schnitt $W_1 \cap W_2$ IST Untervektorraum

Seien V und W Vektorräume über $\mathbb{R}$ und $\varphi: V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen sie, dass das Bild $\mathrm{Im}(\varphi)$ ein Untervektorraum von W ist

→ $\mathrm{Im}(\varphi)$ ist nicht leer:
Es gilt $0 = \varphi(0) \in \mathrm{Im}(\varphi)$ da φ linear ist

→ Für $x, y \in \mathrm{Im}(\varphi)$ gilt $x + y \in \mathrm{Im}(\varphi)$.
Es existieren $a, b \in V$, so dass $\varphi(a) = x$ und $\varphi(b) = y$
Damit gilt: $x + y = \varphi(a) + \varphi(b) = \varphi(a+b) \in \mathrm{Im}(\varphi)$ da φ linear ist

→ Für $x \in \mathrm{Im}(\varphi)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $\alpha x \in \mathrm{Im}(\varphi)$: Analog zu vorher: $\alpha x = \alpha \varphi(a) = \varphi(\alpha a) \in \mathrm{Im}(\varphi)$ aufgrund Linearität von φ

Rank $BC \leq \min(\text{rank } B, \text{rank } C)$

$A_1 = T^{-1} A_0 T$

$U_1 \cup U_2 \to$ kein Unterraum U

↳ Zwei Geraden $\mathbb{R}^2$ die durch $0,0$ gehen, U_1 U_2 nicht geschlossen gegenüber Addition

---

$A = n \cdot m \times k$ Matrix $(nm = \text{Zeilen})$

- lin unab. $r = k$
- lin ab. $r < k$
- ESZ $r = nm$

Symmetrische, invertierbare Matrix: A^{-1} ist symmetrisch

Selbstinverse Matrix: $A^2 = I$

Nilpotente Matrix $A^n = 0$

Sind zwei Spalten von B gleich, so müssen entsprechende Spalten von AB auch gleich sein

A, B symmetrisch, AB nicht unbedingt symmetrisch

Sind zwei Zeilen von A gleich so müssen Zeilen von AB auch gleich

Multiple Choice:

✓ Sei $S \subset V$ (Menge von Vektoren) und W ein Unterraum von V. Falls $S \subset W$ dann gilt $\operatorname{span} S \subset W$

✗ v_1, v_2, v_3 sind paarweise l.u. wenn $\{v_1, v_2\}$, $\{v_1, v_3\}$ und $\{v_2, v_3\}$ l.u. sind Die Menge $\{v_1, v_2, v_3\}$ ist l.u

✗ Sei $B \in \mathbb{E}^{3\times 1}$ und $C \in \mathbb{E}^{1\times 3}$ so kann BC Rang 3 haben B: $\begin{smallmatrix} x \\ x \\ x \end{smallmatrix}$ C: $x\ x\ x$ BC: $\begin{smallmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{smallmatrix}$

✓ Sei $D \in \mathbb{E}^{2\times 2}$, $\dim(\ker D) = 2$ nur wenn $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

✗ Seien v_1 und v_2 EV von A, so ist $v_1 + v_2$ auch EV

✗ Sei Q unitär und $A \in \mathbb{E}^{n\times n}$, so ist $\det QA = \det A$
↳ $|\det Q| = 1$ $\det QA = \pm \det A$ kommt auf Grösse von Q an

✓ Wenn A^2 invertierbar ist, ist auch A^3 invertierbar

✓ Falls A regulär und $A^2 = A$, dann $A = I$

✗ Für x, y, z linear abhängig gilt $x = \alpha \cdot y + \beta \cdot z$
↳ Kann sein, dass nur y, z linear abhängig sind

✓ Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit n verschiedenen EW hat 2^n normierte Eigenwertzerlegungen

✓ Falls $A \in \mathbb{E}^{n\times n}$ und $\chi_A(\lambda) = (1-\lambda)^n + 2$ ist A invertierbar

✓ Falls $A, A^2 \in \mathbb{E}^{n\times n}$ und A^2 regulär, ist A^3 invertierbar

✗ Falls λ_1 mit v und λ_2 mit w, so ist $\lambda_1 + \lambda_2$ ein EW mit EV $v + w$

Dimension des Unterraums aller schiefsymmetrischen reellen 3×3 Matrizen 3

Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit EW $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

✓ - A ist diagonalisierbar, wenn alle EW verschieden sind

✗ - A ist diagonalisierbar, wenn A 3 EV hat
↳ EV müssten l.u. sein

✓ - Falls $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 1$ und $B = A^3 - 3A^2$ dann ist B diagonalisierbar

✗ - Falls $AP = PD$ und D eine Diagonalmatrix, dann sind Spalten von P EV von A
↳ nur wenn EW von A die Diagonale von D bilden.

Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, B ist regulär und $B = QR$

✗ - $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \to \|Ax\|_2$, ist Norm in $\mathbb{R}^n$

✓ - Wenn $\nexists k$ so dass A^k invertierbar, so ist A nicht invertierbar

✓ - $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $\|Ax\|_2 \leq \|A\|_2 \cdot \|x\|_2$

✗ - $\det B = \det R$

✓ - $\|B\|_2 = \|R\|_2$

✓ - $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \to \|Qx\|_2$

✗ - AB ist regulär, aber $B^{-1}A$ nicht unbedingt

✗ $\|AB\|_2 < \|A\|_2$

Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ und $b \in \mathbb{R}^2$. Nehmen wir an es existiert eine Lösung zu $Ax = b$

✓ - $Ax = b$ hat immer ∞ Lösungen
↳ min 1. freie Variable

✗ - Lösungsmenge zu $Ax = b$ bildet eine Gerade in 3D
↳ kann auch Ebene sein, 1 od. 2, freie Variablen

✓ - Geometrisch entspricht $Ax = b$ dem Schneiden von 2 Ebenen in 3D

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit l.u. Spalten und $A = Q_1 R_1$, $A = Q_2 R_2$ zwei QR Zerlegungen von A:

✗ - Rang $R_1 = m$

✓ - Rang $R_1 = n$

✗ - Rang $R_2 = m$

✓ - Rang $R_2 = n$

✓ - $Q^T Q_2$ ist regulär

✓ $Q_1^T Q_2$ ist orthogonal

✓ $Q_1^T Q_2$ ist o. Dreiecksm.

✓ $Q^T Q_2$ ist u. Dreiecksm.

✓ $Q_1^T Q_2$ ist Diag. M.

✗ $Q_1^T Q_2 = I$

Welche der folgenden Aussagen über $A \in \mathbb{E}^{n\times n}$ sind im allgemeinen wahr.

✓ $\operatorname{im} A = \operatorname{im} 2A$

✗ $\operatorname{Im} A = \operatorname{im} A^2$

✗ $\operatorname{im} A = \operatorname{im} (A + I)$

✗ $\operatorname{im} A = \operatorname{im} A^T$

✓ $\ker A = \ker 2A$

✗ $\ker A = \ker A^2$

✗ $\ker A = \ker (A + I)$

✗ $\ker A = \ker A^T$

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit. Ausserdem seien $\lambda_1 \dots \lambda_n$ die EW zu EV $v_1 \dots v_n$

✗ - A^n hat min 1 EW mit strikt posit. Imagin.

✓ - Es gilt $\lambda_j > 0$ für alle $j = 1 \dots n$

✗ - A hat min 1 EW mit geom Vielf < alg Vielf

✗ - Die EW sind paarweise verschieden d.h. $\lambda_j \neq \lambda_i$ falls $i \neq j$

✓ - Es gibt positive reelle Zahlen $\alpha > 0$, so dass $v^T A v \geq \alpha v^T v$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$

Sonstiges:

Sei $V = P_{<2}(\mathbb{R})$ und $\varphi: V \to \mathbb{R}^3$ so dass $\varphi: p \to \begin{pmatrix} p(-1) \\ p(0) \\ p(1) \end{pmatrix}$

Finde eine Basis von V sodass $\varphi = I$

$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ bez. Standardbasis $\begin{pmatrix} a - b + c \\ a \\ a + b + c \end{pmatrix}$

Wir suchen b_1, b_2, b_3, so dass

$b_1(-1) = 1$ $\quad b_1(0) = 0$ $\quad b_1(1) = 0$

$b_2(-1) = 0$ $\quad b_2(0) = 1$ $\quad b_2(1) = 0$

$b_3(-1) = 0$ $\quad b_3(0) = 0$ $\quad b_3(1) = 1$

erfüllt werden. Es sind immer zwei Nullstellen, damit können wir folgende Polynome konstruieren.

$b_1(x) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (x-1)$

$b_2(x) = -1 (x-1)(x+1)$ $\quad$ Polynome der Form: $c \cdot \underbrace{(x-a)(x-b)}_{\text{Nullstelle}}$

$b_3(x) = \frac{1}{2} x (x+1)$

Gegeben: $P_2 \to P_1$ $\quad p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 \mapsto (2\alpha_1 + 1) + 4\alpha_2 x$

Gesucht $M_B^A(G)$ bez. $A = \{x^2 + x + 1, x + 1, x\}$ und $B = \{x + 1, 1\}$

$A: \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$G(a_1) = G\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \\ 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}_{Be}$

$B_A = B_e T$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot T$ $\quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$T^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

↳ mit allen Vektoren!

Allgemeine Formel:

Kreisgleichung: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

Summe: $\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

Berechnen Sie für $F(A) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ die Abb. Matrix bezüglich der Basis (Standard) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ldots$

$F(b_1) = b_1 \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$F(b_2) = b_2 \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$F(b_3) = b_3 \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$F(b_4) = b_4 \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$= \quad F_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Geben Sie die Normalgleichung für die kleinste Distanz von $g(t) = a + bt$ und $h(s) = c + s \cdot d$, wobei $a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$

Gleichung: $\operatorname{argmin} \| a - c + (b \; -d) \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} \|^2$ $\quad \operatorname{argmin} \| g(t) - h(s) \|^2 = \operatorname{argmin} \| a + tb - c - sd \|^2$

$(b \; -d)^T (b \; -d) \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} = (b \; -d)(c - a)$

$m_{11} = b^T b$

$m_{12} = m_{21} = -d^T b$ $\quad M \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$

$m_{22} = d^T d$

$k_1 = b^T (c - a)$

$k_2 = -d^T (c - a)$

Gegeben sei ein SP über $\mathbb{R}^n$. Definieren Sie $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so dass $\langle x, y \rangle = x^T A y$

Die Matrix setzt sich aus dem SP der Einheitsvektoren zusammen. $A_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$

Mithilfe der Linearität und Symmetrie des SP gilt:

$\langle x, y \rangle = \langle \sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j \rangle = \sum_j y_j \sum_i x_i \langle e_j, e_i \rangle$

$= x^T A y$

Charakterisieren Sie die Menge der Matrizen A, die ein SP $x^T A y$ definieren

Matrix muss symmetrisch, positiv definit sein

1) $x^T A (y + z) = x^T A y + x^T A z$

2) $x^T A y = (x^T A y)^T = y^T A^T x = y^T A x$

3) $x^T A x > 0$ | pos def. positiv definit

Welche Bedingung muss M erfüllen, damit ihre Spalten eine Orthonormalbasis bzgl. SP mit A bilden

Für m_i, m_j von M muss gelten $m_i^T A m_j = \delta_{ij}$

Daraus ergibt sich $M^T A M = I$

QR

$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} / \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

$q_2' = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

$q_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} / \left\| \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \right\|_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

$Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ $R = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Beweise:

Sei $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine orthogonale Matrix. Zeigen sie, dass $\|Qx\|_2 = \|x\|_2$.

$\|Qx\|_2^2 = \langle Qx, Qx \rangle = (Qx)^T (Qx)$
$= x^T Q^T Q x = x^T I x = x^T x = \langle x, x \rangle = \|x\|_2^2$ $\square$

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$, zeige, dass für das LGS: $\begin{pmatrix} A \\ \omega I \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ eine Matrix Q existiert und n-Werte d, sodass die Least-Squares Lösung wiefolgt aussieht

$$x^* = Q^T \begin{pmatrix} \frac{1}{d_1 + \omega} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \end{pmatrix} Q (Ab_1 + \omega b_2)$$

Normalgleichung: $(A^2 + \omega^2 I) x = (Ab_1 + \omega b_2)$

A ist diagonalisierbar: $A = Q^T \Lambda Q$ $A^2 = Q^T \Lambda^2 Q$

Einsetzen: $A^2 + \omega^2 I = Q^T \Lambda Q + Q^T \omega^2 I Q$

$\Rightarrow (A^2 + \omega^2 I)^{-1} = Q \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1^2 + \omega^2} & & \\ & \ddots & \\ & & \end{pmatrix} Q^T$

$\Rightarrow x^* = Q^T \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1^2 + \omega^2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \end{pmatrix} Q (Ab_1 + \omega b_2)$

$\square$

Sei $M \in \mathbb{E}^{n \times n}$ symmetrisch, so dass $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ gilt, dass $x^T M x > 0$. Zeige, dass $\langle x, y \rangle_M = x^T M y$ ein SP ist

Linearität im 2ten Faktor:

$\langle x, \alpha y + z \rangle_M = x^T M (\alpha y + z) = \alpha x^T M y + x^T M z =$
$\alpha \langle x, y \rangle_M + \langle x, z \rangle_M$

Symmetrie:

$\langle x, y \rangle_M = x^T M y = (x^T M y)^T = y^T M^T x = y^T M x = \langle y, x \rangle$

da M und die 1×1 Matrix $x^T M y$ symmetrisch sind.

Positiv definit:

$\langle x, x \rangle_M = x^T M x \geq 0$

$\langle x, x \rangle_M = x^T M x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

da M positiv definit ist $\square$

Zeige, dass wenn $x \in \mathrm{Ker}(A^T A)$ gilt, auch $x \in \mathrm{Ker}(A)$ gilt.

$A^T A x = 0$
$x^T A^T A x = 0$
$(Ax)^T Ax = 0$
$\|Ax\|^2 = 0$
$\Rightarrow x \in \mathrm{Ker}(A)$

oder $A^T A x = 0 \Leftrightarrow A^T y = 0$
$y \in R(A)$ und $y \in N(A^H)$
$\Rightarrow y \in R(A) \cap N(A^H)$
$\Rightarrow y \in \{0\} \Rightarrow x \in \mathrm{Ker}(A)$

Zeige, dass wenn λ ein EW von AB ist, λ auch EW von BA ist, wenn A, B quadratisch sind

wollen zeigen, dass y existiert, so dass $BAy = \lambda y$. wir wählen $Bx = y$

$BAy = BABx = B(\lambda x) = \lambda(Bx) = \lambda y$

Zeige, dass $\forall x, y$ $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle_V + \langle x-y, x-y \rangle_V$
$= \langle x+y, x \rangle + \langle x+y, y \rangle + \langle x-y, x \rangle_V - \langle x-y, y \rangle_V$
$= \langle x, x+y \rangle + \langle y, x+y \rangle + \langle x, x-y \rangle_V - \langle y, x-y \rangle_V$
$= \dots$
$= 2\langle x, x \rangle + 2\langle y, y \rangle = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

Sei $V = P_n^{[0,1]}$ der Raum der Polynome vom Grad $\leq n$ über dem Intervall $[0, 1]$. Zeigen sie, dass kein SP existiert, dass die ∞-Norm induziert

∞-Norm: $\max_{t \in [0,1]} |p(t)|$

Gegenbeispiel: $x(t) = t^2$ und $y(t) = 1 - t^2$

$\|x+y\|_\infty^2 + \|x-y\|_\infty^2 \neq 2(\|x\|_\infty^2 + \|y\|_\infty^2)$

$\|t^2 + 1 - t^2\|_\infty^2 + \|t^2 - 1 + t^2\|_\infty^2 \neq 2(\|t^2\|_\infty^2 + \|1 - t^2\|_\infty^2)$

$1^2 + 1^2 \neq 2(1^2 + 1^2)$

$2 \neq 4$

Geg. sei $A = V \Lambda V^T$ und $\pi(A) = a_m A^m + \dots + a_1 A$. Zeigen Sie dass $\pi(A) = V \operatorname{diag}(\pi(\lambda_1), \dots \pi(\lambda_n)) V^T$

$A^k = V \Lambda^k V$ weiters gilt $\alpha A^k + \beta A^l = V(\alpha \Lambda^k + \beta \Lambda^l) V^T$

Für beliebiges $\pi(A)$ gilt

$a_n A^n + \dots + a_1 A = a_n V \Lambda^n V^T + \dots a_1 V \Lambda V^T$
$= V(a_n \Lambda^n + \dots + a_1 \Lambda) V^T$
$= V(\operatorname{diag}(\pi(\lambda_1), \dots, \pi(\lambda_n))) V^T$

$M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $c \in \mathbb{C}$. Jeder EW λ von M, $\lambda + c$ ist EW von $M + cI$

$Mx = \lambda x$ $\Rightarrow (M + cI) x = Mx + cx$
$= \lambda x + cx$
$= (\lambda + c) x$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonal und n ungerade. Entweder $A - I$ oder $A + I$ singulär

$(A \pm I) x = Ax \pm x = 0 \Rightarrow Ax = \pm x = \lambda x$

$\Rightarrow A$ hat EW $\lambda = \pm 1$. Da A orthogonal (längentreu) haben alle EW komplexen Betrag 1. Da komplexe EW immer auch komplex konjugiert vorkommen und n ungerade, muss ein reeller EW $\lambda = \pm 1$ existieren $\Rightarrow$ ker $A \pm I$ nicht trivial

$A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ mit $m > n$ und Rang $A < n$ und $b \in \mathbb{C}^n$

$A^H A x = A^H b$ immer ∞ Lösungen

$A^H (Ax - b) = 0 \Rightarrow Ax - b \in N(A^H)$

Satz C.9 $\mathbb{C}^m = \underbrace{N(A^H)}_{bn} \oplus \underbrace{R(A)}_{br} \Rightarrow b = bn + br$

$br = Ax_b \Rightarrow b = bn + br \Rightarrow Ax_b - b = -bn$

$= bn + Ax_b$

Insgesamt $A^H (Ax_b - b) = -A^H \cdot bn = 0$

Da Rang $A < n$ und $n < m$ ist ker $A^H A$ nicht trivial: ∞ Lösungen