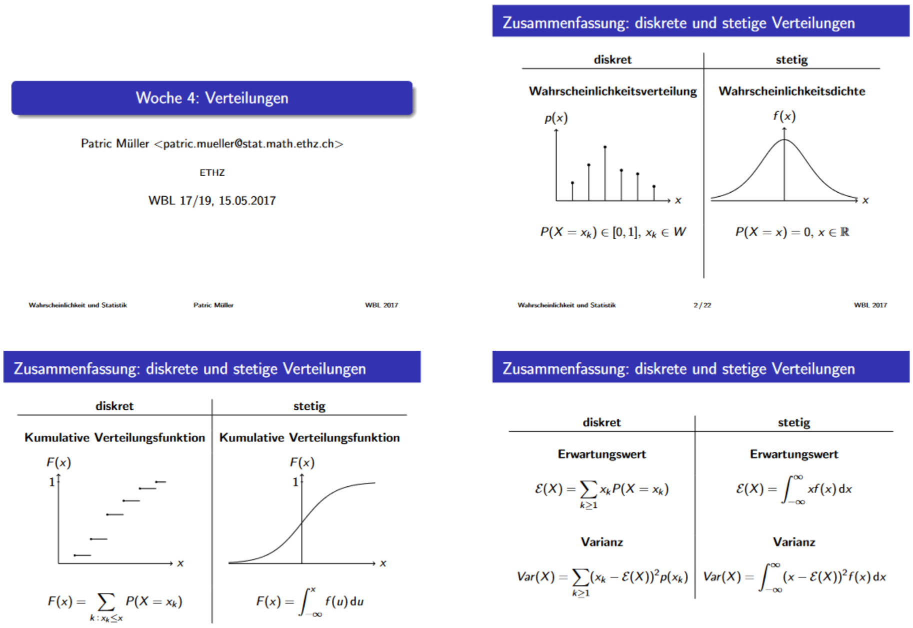
Wahrscheinlichkeit und Statistik

Gnkgo, Informatik B. Sc. 4. Semester

Contents

1 Wichtig zu merken

Wir haben eine σ-Algebra auf Ω. Dann muss die leere, die volle und immer das jeweilige Komplement in der Algebra vorhanden sein.



m

Figure 1: Diskrete und stetige Verteilung

2 Dichte

- Eine Wahrscheinlichkeitsdichte muss integriert über den gesamten Definitionsbereich 1 ergeben.
- Nichtnegativität: Die Dichte $f(x, y)$ muss für alle x und y größer oder gleich 0 sein.
- Seien X und Y zwei stetige Zufallsvariablen mit Dichte f_X resp f_Y
  - Nicht notwendigerweise gemeinsame Dichte
  - Wenn X, Y unabhängig, dann gemeinsame Dichte

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

3 Wahrscheinlichkeiten

3.1 Approximationen

- Wenn Bin() Wahrscheinlichkeit $p =\sim \frac{1}{2}$ hat, dann ist es wie eine Normalverteilung:

$$X \overset{\text{approx.}}{\sim} \mathcal{N}\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{4}\right)$$

- Wenn Bin() Wahrscheinlichkeit p sehr klein hat und n sehr groß, dann ist es wie eine Poissonverteilung:

$$X \overset{\text{approx.}}{\sim} \text{Poi}(\lambda = np)$$

4 Quiz

Sei (Ω, F, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A \in F$. Was ist korrekt:

- A ist unabhängig von sich selbst genau dann, wenn $P[A] = 1$.
- Nach Definition ist A unabhängig von sich selbst genau dann, wenn $P[A \cap A] = P[A] \cdot P[A]$, also genau für $P[A] = (P[A])^2$ wegen $A \cap A = A$. Wegen $P[A] \geq 0$ ist die letzte Bedingung aber äquivalent zu $P[A] \in \{0, 1\}$.

Sei $p \in [0, 1]$, sei X eine Ber(p)-verteilte Zufallsvariable und definiere $Z := (2X - 1)^2$. Was ist der Erwartungswert $E[Z]$?

- Da X Werte in $\{0, 1\}$ annimmt, nimmt Z Werte in $\{1\}$ an. Somit gilt $E[Z] = 1 \cdot P[Z = 1] = 1$.

Es gilt: $P[X \geq 1|X \leq 1] = P[X = 1]P[X = 0] + P[X = 1] = \frac{\lambda \cdot e^{-\lambda}}{e^{-\lambda} + \lambda \cdot e^{-\lambda}} = \frac{\lambda}{1+\lambda}$
Seien X und Y zwei diskrete Zufallsvariablen mit gemeinsamer Gewichtsfunktion $p_{X,Y}$

- $E[XY] = \sum_{x \in W_X} \sum_{y \in W_Y} x \cdot y \cdot p_{X,Y}(x, y)$

Stetige Zufallsvariable

- Die Verteilungsfunktion ist stetig.
- Dichtefunktion kann auch einmal (strikt) größer als 1 sein.

Seien X und Y zwei Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte $f_{X,Y}$.

- Die Zufallsvariablen X und Y sind immer stetig.

5 Errors

	H_0 True	H_0 False
Reject H_0	Type I Error	✓
Fail to reject H_0	✓	Type II Error

Type I error: Null Hypothese verwerfen, obwohl sie wahr ist.
Type II error: Null Hypothese nicht verwerfen, obwohl sie falsch ist.

$$P(\text{type I error } / H_0 \text{ is true}) = \alpha$$

$$P(\text{type II error } / H_0 \text{ is false}) = \beta$$

$$P(\text{rejecting a false } H_0) = 1 - \beta$$